(N) 機率的應用

一項隨機實驗(random experiment)的所有可能結果所成的集合(set)，稱為樣本空間(sample space)；樣本空間中的每一結果稱為元素，樣本空間的任一子集合(subset)稱為事件(event)；將樣本空間中每一個元素賦予唯一實數的規則稱為隨機變數(random variable)。亦即，隨機變數是一個函數，它將樣本空間中的每一個元素與一個實數相對應。我們以大寫字母 X 表示隨機變數，而以小寫字母 x 表示其隨機變數值。

例題 1. 擲一個公平的銅板，則樣本空間 $S=\{H,T\}$，其中 H 表示正面，T 表示反面。

定義一隨機變數 X 為

$$X(\omega)=\begin{cases}0 & ,\omega=T\\ 1 & ,\omega=H\end{cases}$$

若隨機變數 X 的值域構成一區間，則隨機變數 X 稱為連續隨機變數(continuous random variable)。當 $f(x)$ 是表示連續隨機變數 X 之諸數值的函數時，$f(x)$ 通常稱為 X 的機率密度函數(probability density function)或簡稱為密度函數。因為面積將用來表示機率值，而機率值均為正，所以密度函數的圖形必完全位於 x 軸的上方，其相關性質為

(1) $0\le f(x)\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

註：機率密度函數 $f(x)$ 並非代表隨機變數在 x 的機率值。連續隨機變數在固定一點的機率值永遠為 0。

例題 2. 若 X 為一連續隨機變數，且其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}kx & ,0\le x\le 1\\ 0 & ,其他\end{cases}$，試求 k 值。

解：

隨堂練習：若 X 為一連續隨機變數，且其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}kx^2 & ,0\le x\le 4\\ 0 & ,其他\end{cases}$，試求 k 值。

若 X 為一連續隨機變數，則累積分配函數(cumulative distribution function)定義為

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

根據為積分基本定理可知，$F'(x)=f(x)$ 且其相關性質如下：

(1) $0\le F(x)\le 1$ 恆成立

(2) $F(x)$ 為非遞增函數，亦即，若 $x_1<x_2$，則 $F(x_1)\le F(x_2)$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$

(4) $F(x)$ 為右連續函數，亦即，$\lim\limits_{t\to x^+}F(t)=F(x)$

例題：若 X 為一連續隨機變數，且其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}2x & ,0\le x\le 1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$，求累積分配函數。

解：

隨堂練習：若 X 為一連續隨機變數，且其機率密度函數為 $f(x)=\begin{cases}c(1+x^2) & ,0\le x\le 1\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$，求(1) c 值；(2) 累積分配函數。

例題 3. 若 X 為一均勻分配隨機變數(uniform distribution)，則其機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,a\le x\le b\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

求累積分配函數。

解：

隨堂練習：若 X 為一指數分配隨機變數(exponential distribution)，則其機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x\ge 0\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

求累積分配函數。

隨機變數的一個重要的特色是”集中趨勢”，亦即為"平均"值，隨機變數 X 的平均值稱為它的期望值(expected value)或平均數(mean)，記為以 $E(X)$ 或 μ。對連續隨機變數而言，我們可以從機率密度函數計算期望值。

定義 6.6

令 X 為具有機率密度函數 $f(x)$ 的連續隨機變數，則 X 的期望值或平均數為

$$E(X)=\mu=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

例題 4. 若連續隨機變數 X 在區間[1,3]為一均勻分配隨機變數，亦即，其機率密度函數為 $f(x)=\dfrac{1}{2}$，則其期望值為何？

解：

隨堂練習：設 X 為連續隨機變數，其機率密度函數為 $f(x)=\dfrac{3}{26}x^2$，$1\le x\le 3$，試求期望值？

隨機變數的另一個重要的特色是"離均趨勢"，亦即為"標準差(standard derivative)"或"變異數(variance)"，記為以 σ 或 $Var(X)=\sigma^2$。對連續隨機變數而言，我們可以從機率密度函數計算標準差或變異數。

定義 6.7

令 X 為具有機率密度函數 $f(x)$ 的連續隨機變數，則 X 的變異數為

$$Var(X)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

註： $Var(X)=\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$

例題 5. 若連續隨機變數 X 在區間[1,3]為一均勻分配隨機變數，亦即，其機率密度函數為 $f(x)=\frac{1}{2}$，則其變異數為何？

解：

隨堂練習：設 X 為連續隨機變數，其機率密度函數為 $f(x)=\frac{3}{26}x^2$，$1\le x\le 3$，試求變異數？

最後，列出一些常見的連續隨機變數分配：

(1) 均勻分配(uniform distribution)

(a) 機率密度函數(pdf)： $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & ,a\le x\le b\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$

(b) 累積機率函數(cdf)： $F(x)=\begin{cases}0 & ;x\le 0\\ \frac{x-a}{b-a} & ;0<x<b\\ 1 & ;x\ge b\end{cases}$

(c) 數學期望值(expected value)： $E(X)=\mu=\frac{b+a}{2}$

(d) 變異數(variance)：$Var(X)=\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

(e) 動差生成函數(moment generating function; mgf)： $M(t)=E(e^{tX})=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$, $t\ne 0$

(2) 指數分配(exponential distribution)

(a) 機率密度函數(pdf)： $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ,x\ge 0\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$

(b) 累積機率函數(cdf)： $F(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & ,x\geq 0\end{cases}$

(c) 數學期望值(expected value)： $E(X)=\mu=\dfrac{1}{\lambda}$

(d) 變異數(variance)：$V(X)=\sigma^2=\dfrac{1}{\lambda^2}$

(e) 動差生成函數(moment generating function; mgf)： $M(t)=\dfrac{-\lambda}{t-\lambda}$， $t<\lambda$

(3) 常態分配(normal distribution)

(a) 機率密度函數(pdf)： $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$， $-\infty<x<\infty$

(b) 累積機率函數(cdf)： $F(x)=P(X\leq x)$

(c) 數學期望值(expected value)： $E(X)=\mu$

(d) 變異數(variance)：$V(X)=\sigma^2$

(e) 動差生成函數(moment generating function; mgf)： $M_X(t)=e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$

註：當 $\mu=0$ ，$\sigma^2=1$時，稱為標準常態分配。