

5.2 相對極值

一般實際生活遭遇到的函數圖形如下圖 5.6。

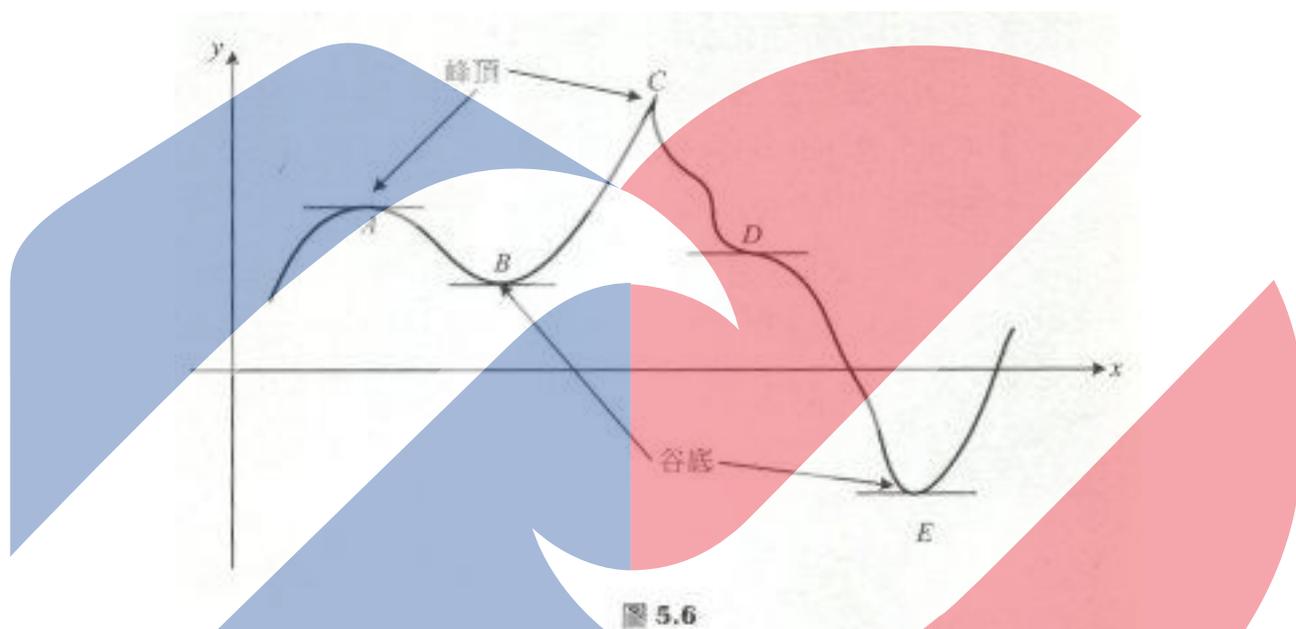


圖 5.6

在 A, C 點出現峰頂，在 B, E 點出現谷底，在 A, C, B, E 點的切線均為水平線，在尖點 C 沒有切線。而在 D 點雖然切線為水平線，但 D 點不是峰頂也不是谷底。我們要用微積分方法來找出函數圖形的峰頂和谷底。函數圖形的峰頂是所謂的相對極大值(relative maximum)，谷底是所謂的相對極小值(relative minimum)。相對極大值和相對極小值合起來稱為相對極值(relative extreme)。我正式定義如下：

定義 5.2

- (1) 若存在一個包含 C 點的開區間 (a, b) 使得對所有的 $x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(c)$, 則稱 $f(x)$ 在 $x=C$ 有相對極大值。
- (2) 若存在一個包含 C 點的開區間 (a, b) 使得對所有的 $x \in (a, b)$, $f(x) \geq f(c)$, 則稱 $f(x)$ 在 $x=C$ 有相對極小值。

由於 $f'(x) > 0$ 時， $f(x)$ 為遞增； $f'(x) < 0$ 時， $f(x)$ 為遞減。因此，只有在 $f'(x) = 0$ 或 $f'(x)$ 不存在時，才可能會有相對極值發生；這些點很重要，我們賦予一個特別名稱。

定義 5.3

C 點為 $f(x)$ 定義域中的一點，若 $f'(c) = 0$ 或 $f'(c)$ 不存在，我們稱 C 點為**臨界值** (critical number)，而對應對函數圖形上的點 $(c, f(c))$ 稱**臨界點** (critical point)。

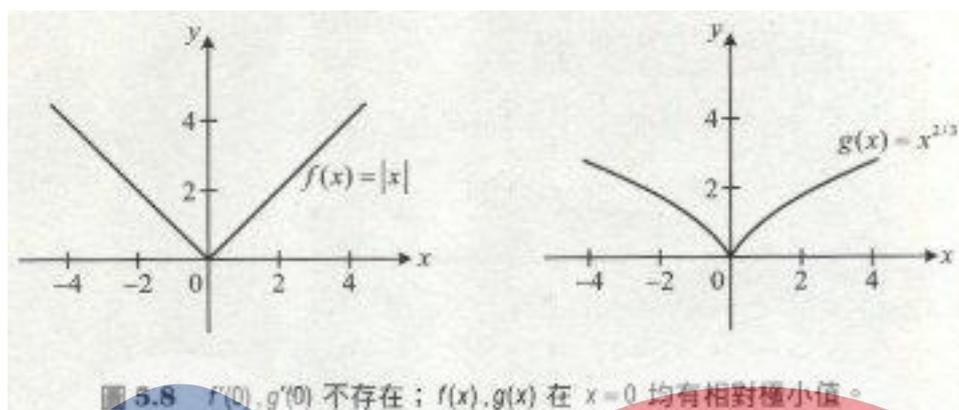
我們注意到，相對極值必然發生在臨界點。但並非所有臨界點都會有相對極值。例如， $f(x) = x^3$ 的導數為 $f'(x) = 3x^2$ ，故 $f'(0) = 0$ 。但 $x=0$ 雖是臨界值， $f(x)$ 在 $x=0$ 既非相對極大值，也非相對極小值。(圖 5.7)



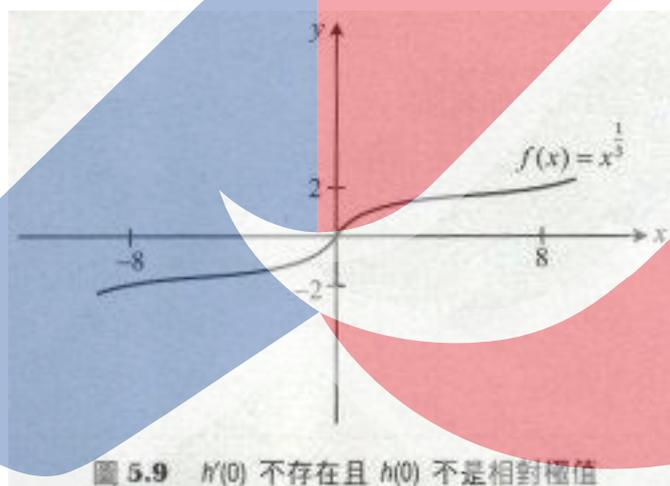
南方科技大學

Southern Taiwan University

以上是導數存在的情形，至於導數不存在的臨界點，可能發生相對極值，例如 $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 時導數 $f'(0)$ 和 $g'(0)$ 不存在， $f'(0)$ 和 $g'(0)$ 均為相對極小值。(圖 5.8)



導數不存在的臨界點，也可能沒有相對極值，例如， $h(x) = x^{\frac{1}{3}}, h'(0)$ 不存在且 $h(0)$ 也不是相對極值。(圖 5.9)



綜上所述，函數 $f(x)$ 若有相對極值，必定發生在臨界點，但反過來，在臨界點不一定會有相對極值。

Southern Taiwan University

例 3

求 $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ 的所有臨界值。

隨堂練習

試求 $g(x) = (x-1)^4$ 的所有臨界值。

 例 4

求 $h(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ 的所有臨界點。

 隨堂練習

試求 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 的所有臨界值。

找到了臨界點，如何檢驗辨識它是相對極大值或相對極小值？或兩者都不是？我們現在介紹一階導數相對極值判別法 (first derivative test for relative extreme)。

定理 5.2 (一階導數相對極值判別法)

c 為 $f(x)$ 的臨界值，若有在一個包含 c 的開區間 (a, b) 使得

(1) 若 $x \in (a, c)$ 時， $f'(x) > 0$ 且 $x \in (c, b)$ 時， $f'(x) < 0$ ，則 $f(c)$ 為一相對極大值。

(2) 若 $x \in (a, c)$ 時， $f'(x) > 0$ 且 $x \in (c, b)$ 時， $f'(x) > 0$ ，則 $f(c)$ 為一相對極小值。

(3) 若 $x \in (a, c) \cup (c, b)$ 時， $f'(x)$ 恆正或恆負，則 $f(c)$ 不是相對極值。

參考圖 5.10。

 例 5

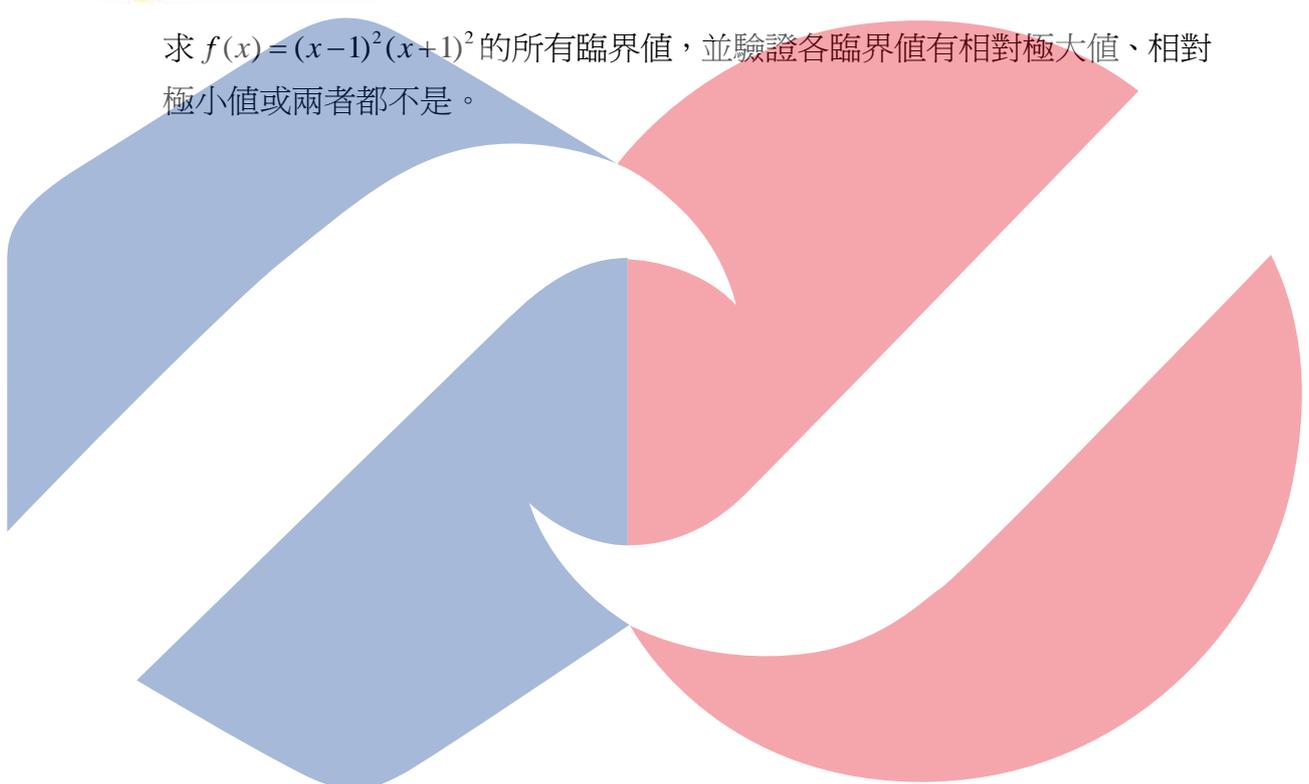
求 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6$ 的所有臨界值，並驗證各臨界值有相對極大值、相對極小值或兩者都不是。

 例 6

求 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 的所有臨界點，並驗證各臨界點有相對極大值、相對極小值或兩者都不是。

 隨堂練習

求 $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ 的所有臨界值，並驗證各臨界值有相對極大值、相對極小值或兩者都不是。



南台科技大學
Southern Taiwan University