

4.7 高階導數

速度是位置函數對時間的變化率，而加速度又是速度對時間的變化率。因此加速度就是位置函數的變化率的變化率。函數的變化率的變化率在經濟學上也常用到。例如，有時通貨膨脹在上升，但通貨膨脹率卻下降，這意味著物價仍在上漲，但漲得沒有先前快。

一個函數 $f(x)$ 的導數 $f'(x)$ 仍為一函數。若函數 $f'(x)$ 的導數 $(f'(x))' = f''(x)$ 存在，我們稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的一階導數 (first derivative of f)，稱 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導數 (second derivative of f)。只要導數存在，可以繼續求出三階、四階等 $f(x)$ 的高階導數。若 $y=f(x)$ ，我們可以把函數 $f(x)$ 在點 x 的一階、二階，甚至於 n 階導數分別表成下列符號

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

$$y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}(x)$$

或

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

例 3.5

試求 $f(x) = 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 8x^2 + x - 11$ 的二階導數。

隨堂練習

求 $y = x^3(2x^2 - 1)$ 的二階導數。

例 3.6

某物體沿一直線運動，其位置函數為 $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 7t - 98$ ， t 代表經過的時間，求該物體的速度和加速度。

隨堂練習

若 $s = f(t) = 5t^2$ ， $0 \leq t \leq 30$ 為高鐵火車在直線上運動 t 秒時的位置（公尺），求在 $t=30$ 秒時的加速度為何？

 例 3 7

若 $y = (x^3 + 2x + 1)(7x - 6)$ ，求 y''' 。

 隨堂練習

若 $y = x^{\frac{7}{2}}$ ，求 $y^{(4)}$ 。

 例 3 8

某製造工廠生產效率的研究顯示，員工上午 8 點到班，工廠產量為

$$Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t \quad (\text{件})$$

t 為到班後的工作時數。

- 試求員工在上午 11 點的生產率為何？
- 試求員工在上午 11 點時生產率的變化率為何？

 隨堂練習

某股票有一天的股價可用下列函數描述

$$p(t) = -8t^2 + 40t + 150 \quad (\text{元})$$

其中 t 代表開盤後的小時數，試問：

- 開盤後 2 小時股價的變化率為何？
- 開盤後 2 小時股價變化率的變化如何？

 例 3 9

若 $x^3 + 3xy + y^3 = 100$ ，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

 隨堂練習

若 $y^2 + y + x = 1$ ，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

南方科技大學
Southern Taiwan University