

## 4.7 高階導數

速度是位置函數對時間的變化率，而加速度又是速度對時間的變化率。因此加速度就是位置函數的變化率的變化率。函數的變化率的變化率在經濟學上也常用到。例如，有時通貨膨脹在上升，但通貨膨脹率卻下降，這意味著物價仍在上漲，但漲得沒有先前快。

一個函數  $f(x)$  的導數  $f'(x)$  仍為一函數。若函數  $f'(x)$  的導數  $(f'(x))' = f''(x)$  存在，我們稱  $f'(x)$  為  $f(x)$  的一階導數 (first derivative of  $f$ )，稱  $f''(x)$  為  $f(x)$  的二階導數 (second derivative of  $f$ )。只要導數存在，可以繼續求出三階、四階等  $f(x)$  的高階導數。若  $y=f(x)$ ，我們可以把函數  $f(x)$  在點  $x$  的一階、二階，甚至於  $n$  階導數分別表成下列符號

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

$$y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}(x)$$

或

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

### 例 3.5

試求  $f(x) = 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 8x^2 + x - 11$  的二階導數。

#### 隨堂練習

求  $y = x^3(2x^2 - 1)$  的二階導數。

### 例 3.6

某物體沿一直線運動，其位置函數為  $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 7t - 98$ ， $t$  代表經過的時間，求該物體的速度和加速度。

#### 隨堂練習

若  $s = f(t) = 5t^2$ ， $0 \leq t \leq 30$  為高鐵火車在直線上運動  $t$  秒時的位置 (公尺)，求在  $t=30$  秒時的加速度為何？

 例 3 7

若  $y = (x^3 + 2x + 1)(7x - 6)$ ，求  $y'''$ 。

 隨堂練習

若  $y = x^{\frac{7}{2}}$ ，求  $y^{(4)}$ 。

 例 3 8

某製造工廠生產效率的研究顯示，員工上午 8 點到班，工廠產量為

$$Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t \quad (\text{件})$$

$t$  為到班後的工作時數。

- 試求員工在上午 11 點的生產率為何？
- 試求員工在上午 11 點時生產率的變化率為何？

 隨堂練習

某股票有一天的股價可用下列函數描述

$$p(t) = -8t^2 + 40t + 150 \quad (\text{元})$$

其中  $t$  代表開盤後的小時數，試問：

- 開盤後 2 小時股價的變化率為何？
- 開盤後 2 小時股價變化率的變化如何？

 例 3 9

若  $x^3 + 3xy + y^3 = 100$ ，求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

 隨堂練習

若  $y^2 + y + x = 1$ ，求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

南方科技大學

Southern Taiwan University