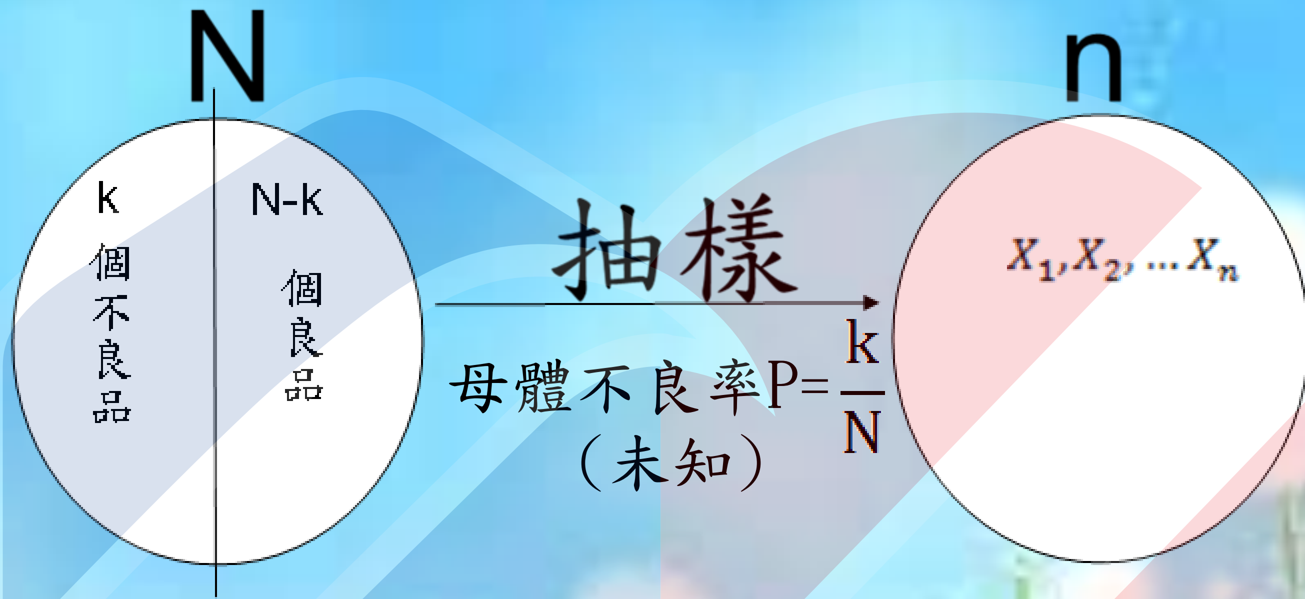
9.3母體比例P的假設檢定

已知生產一批產品N個，其不良率為P(未知)，藉由抽樣檢驗n個產品，給定顯著水準 α 試檢定之

$$H_0：P = P_0$$

$$H_1：P \neq P_0$$

Sol：



令 $X_i=\begin{cases}1 & \text{表示檢驗第i個產品為不良品}\\ 0 & \text{表示檢驗第i個產品為良品}\end{cases}$

且 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 表示檢驗n個產品不良品個數

則 $\hat{P}=\frac{Y}{n}$ 表示樣本不良率

令n≥30(大樣本)

且$\frac{n}{N}\le 0.05$ 由中央極限定理

$Y \overbrace{\text{近似}} B(n,P)$

且$\hat{P}=\frac{Y}{n} \overbrace{\text{近似}} N(P,\frac{P(1-P)}{n})$

即$\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \overbrace{\text{近似}} N(0,1)$

- 使用臨界值檢定法

由 $\hat{P} \xrightarrow[\text{推論}]{} \mathrm{P}$

在 H_0 為真之下

拒絕 H_0 if $\hat{p} > C_2$ or $\hat{p} < C_1$

$\alpha = \mathrm{P}(\text{拒絕} H_0 | H_0 \text{為真})$

$= \mathrm{P}(\hat{p} > C_2 \text{ or } \hat{p} < C_1 | \mathrm{P} = P_0)$

$$\frac{\alpha}{2}=\mathrm{P}(\hat{p} > C_2|\mathrm{P}=P_0)$$

$$=\mathrm{P}\left(\frac{\hat{p}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} > \frac{C_2-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx P(Z > Z_{\alpha/2})$$

$$\therefore \frac{C_2-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = Z_{\alpha/2} \Rightarrow C_2=P_0+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \mathrm{P}(\hat{p} < C_1 | \mathrm{P} = P_0)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} < \frac{C_1 - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx P(Z < -Z_{\alpha/2})$$

$$\therefore \frac{C_1 - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}} = -Z_{\alpha/2} \Rightarrow C_1 = P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

決策法則：

拒絕H_0 if $\hat{p} > P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}$

或 $\hat{p} < P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}$

(不拒絕H_0 if

$P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}} \le \hat{p} \le P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{n}}$)

• 使用Z值檢定法

上述的決策法則可改寫為

拒絕H_0 if $\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}>Z_{\alpha/2}$ 或 $\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}<-Z_{\alpha/2}$

⇨ $z>Z_{\alpha/2}$ 或 $z<-Z_{\alpha/2}$

拒絕H_0 if $|z|>Z_{\alpha/2}$　　$z=\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

(不拒絕if $|z|\leq Z_{\alpha/2}$)

- P值檢定法

當$\hat{p} > P_0$

P值=$2\times P(\hat{P} > \hat{p} | P=P_0)$

$$=2\times P\left(\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} > \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx 2\times P\left(Z > \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$\hat{p} < P_0$

P值=2×P($\hat{P} < \hat{p}$|P=P_0)

$$=2\times P\left(\frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} < \frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

$$\approx 2\times P\left(Z<\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}\right)$$

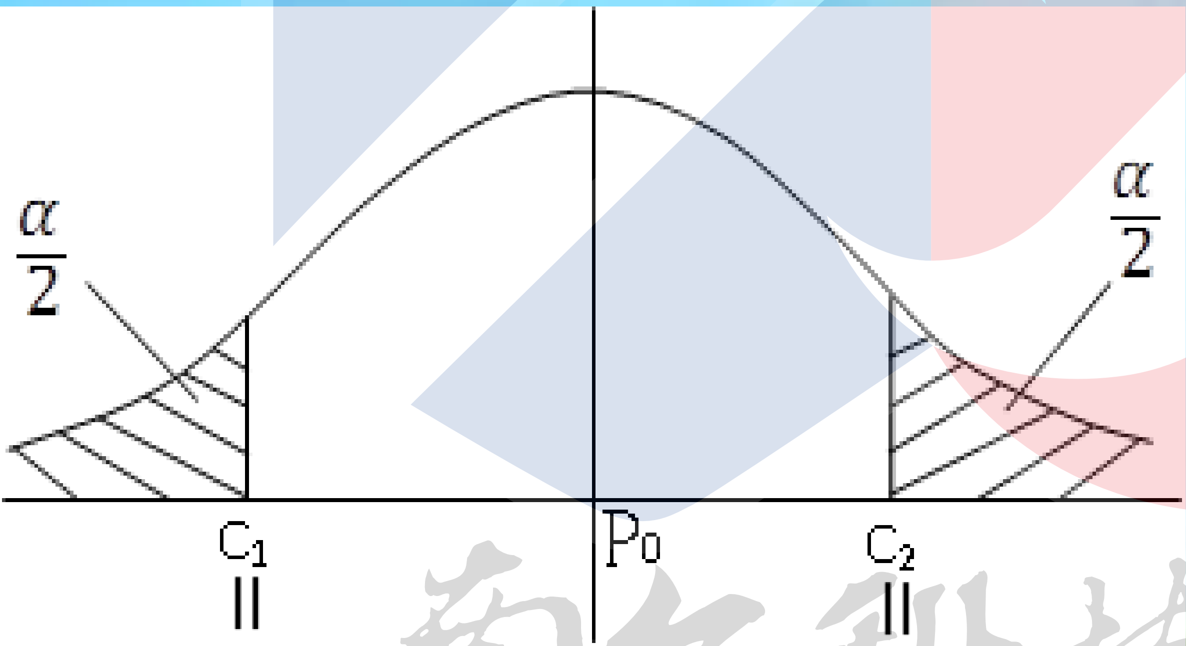
決策法則：

P值≤α ,則拒絕H_0

P值>α ,則不拒絕H_0

- 圖形說明

1.臨界值檢定法



$$P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}} \qquad P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

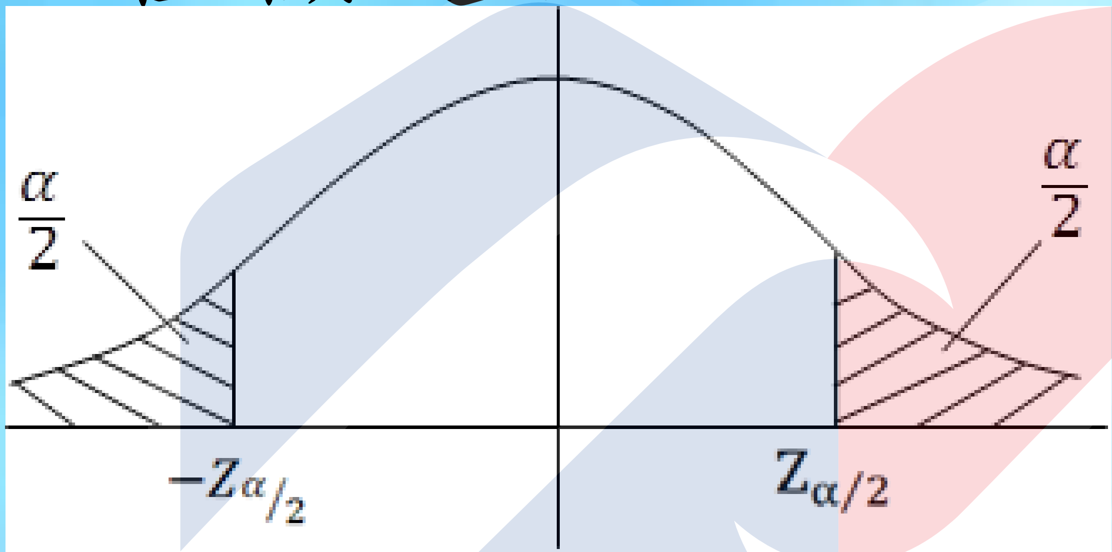
拒絕H_0 if

$$\hat{p} > P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

or

$$\hat{p} < P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$$

2.Z值檢定法

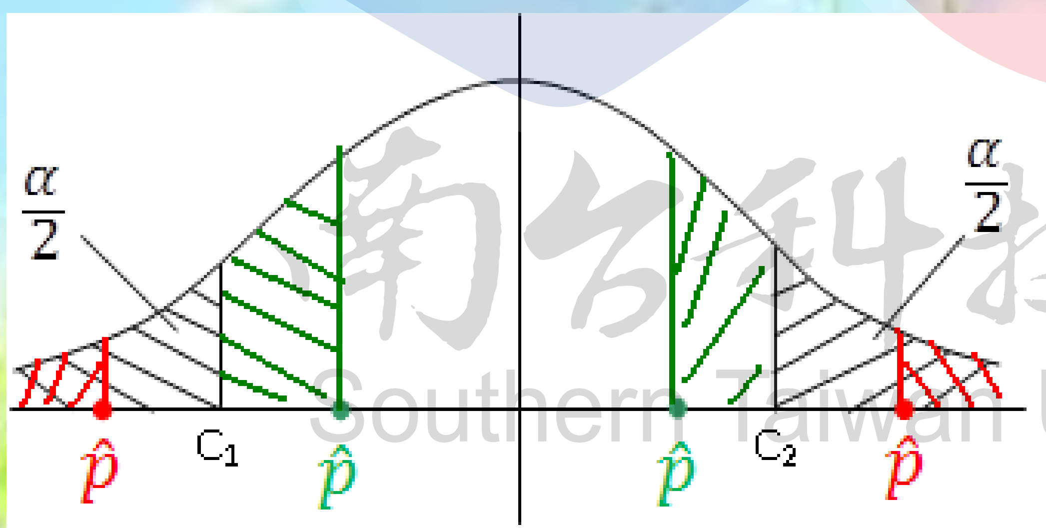


拒絕H_0 if

$|z|>Z_{\alpha/2}$

$$Z=\frac{\hat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

3.P值檢定法



P值≤α ⇨拒絕H_0

P值>α ⇨不拒絕H_0

檢定型態 \ 檢定方法 拒絕域	臨界值檢定法	Z 值檢定法	P 值檢定法
$H_0: P = P_0$ $H_1: P \neq P_0$ (雙尾)	$\hat{P} > P_0 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$ 或 $\hat{P} < P_0 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$	$\lvert z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$\hat{P} > P_0$ P 值=$2\times P(\hat{P} > \hat{p})$ $\hat{P} < P_0$ P 值=$2\times P(\hat{P} < \hat{p})$
$H_0: P \leq P_0$ $H_1: P > P_0$ (右尾)	$\hat{P} > P_0 + Z_{\alpha}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$	$z > Z_{\alpha}$	P 值=$P(\hat{P} > \hat{p})$
$H_0: P \geq P_0$ $H_1: P < P_0$ (左尾)	$\hat{P} < P_0 - Z_{\alpha}\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$	$z < -Z_{\alpha}$ $Z=\frac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$	P 值=$P(\hat{P} < \hat{p})$ P 值$\leq\alpha$ 拒絕H_0 P 值$>\alpha$ 不拒絕H_0

9.4母體變異數σ^2之假設檢定

令 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

假如μ及σ^2未知, 給定顯著水準α

求下列檢定

H_0：$\sigma^2 = \sigma_0^2$

H_1：$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

- 臨界值檢定法

$$s^2 \xrightarrow{\text{推論}} \sigma^2$$

已知 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim x^2(n-1)$

在 H_0 為真之下

拒絕 H_0 if $s^2 > C_2$ or $s^2 < C_1$

α=P(拒絕 $H_0 | H_0$ 為真)

$=P(s^2 > C_2 \text{ or } s^2 < C_1 | \sigma^2 = {\sigma_0}^2)$

$$\frac{\alpha}{2}=P(s^2 > C_2 | \sigma^2 = \sigma_0{}^2)$$

$$=P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)C_2}{\sigma_0{}^2}\right)$$

$$= P(X^2 > x^2{}_{\alpha/2}(n-1)) \quad X^2 \sim x^2(n-1)$$

$$\therefore \frac{(n-1)C_2}{\sigma_0{}^2} = x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P(s^2 < C_1 | \sigma^2 = \sigma_0{}^2)$$

$$= P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)C_1}{\sigma_0{}^2}\right)$$

$$= P(X^2 < x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1))$$

$$\therefore \frac{(n-1)C_1}{\sigma_0{}^2} = x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

決策法則：

拒絕H_0 if $s^2 > \dfrac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$

或 $s^2 < \dfrac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$

(不拒絕H_0 if

$$\frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1} \leq s^2 \leq \frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1})$$

- x^2值檢定法

由上述的討論，可以寫為

拒絕H_0 if $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} > x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$

or $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2} < x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)$

即拒絕H_0 if $x^2 > x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$

or $x^2 < x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)$ $x^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}$

不拒絕H_0 if

$$x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1) \leq x^2 \leq x^2{}_{\alpha/2}(n-1)$$

- P值檢定法

當$s^2 > \sigma_0{}^2$

P值=2×P($S^2 > s^2 | \sigma^2 = \sigma_0{}^2$)

$=2\times P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\right)$

$=2\times P\left(x^2 > \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}\right)$

當$s^2 < \sigma_0^2$

P值=2×P($S^2 < s^2 | \sigma^2 = \sigma_0^2$)

=2×P($\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$)

=2×P($x^2 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$)

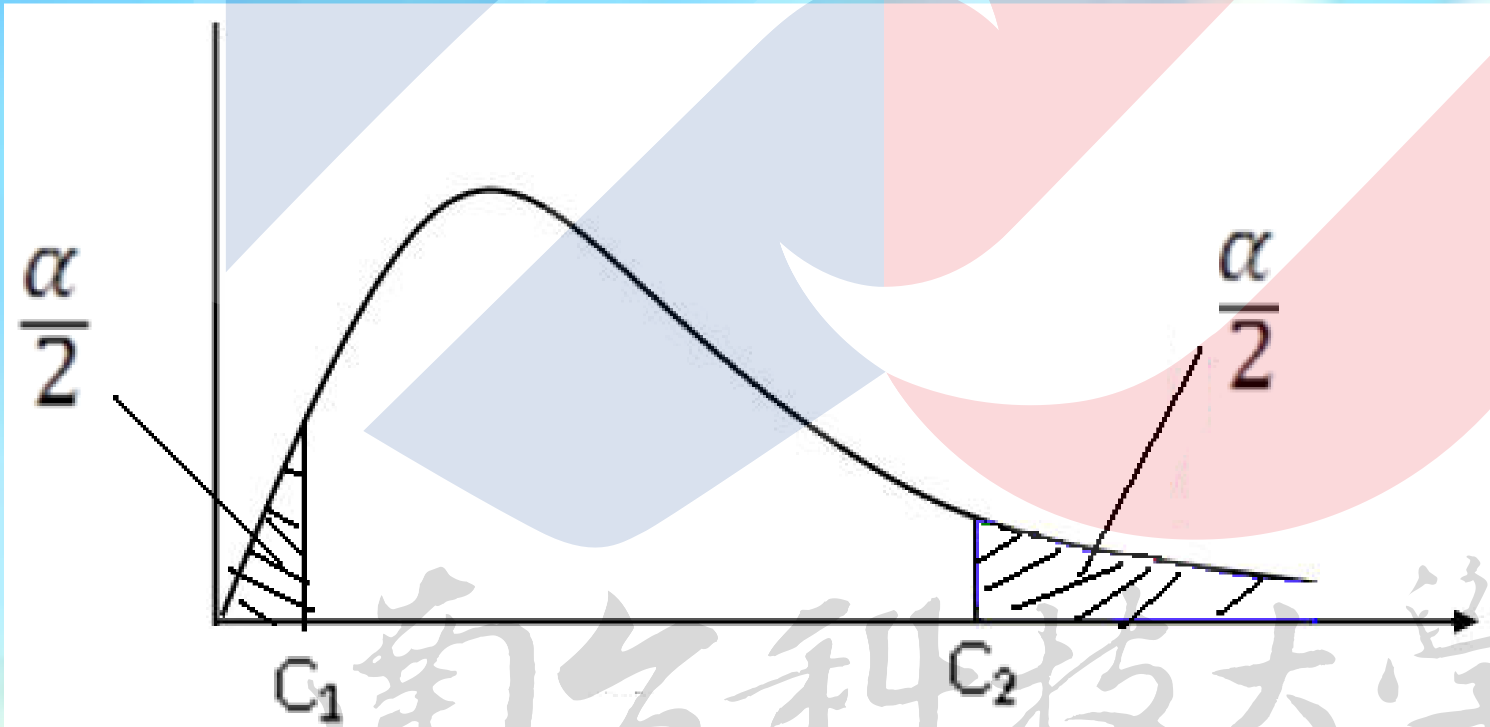
決策法則：

拒絕H_0 if P值≤α

不拒絕H_0 if P值>α

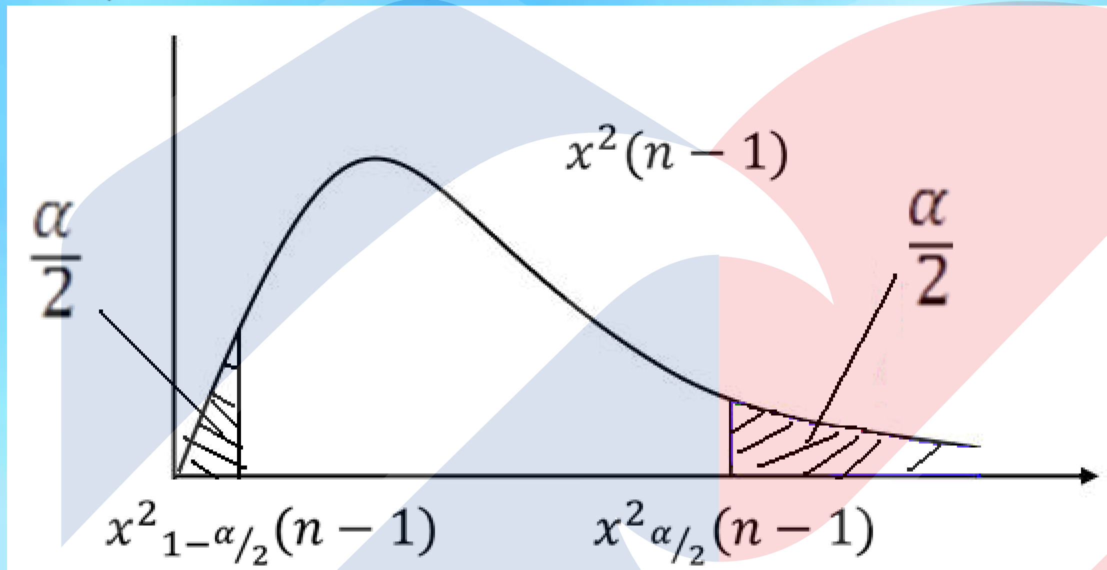
- 圖形說明

1.臨界值檢定法

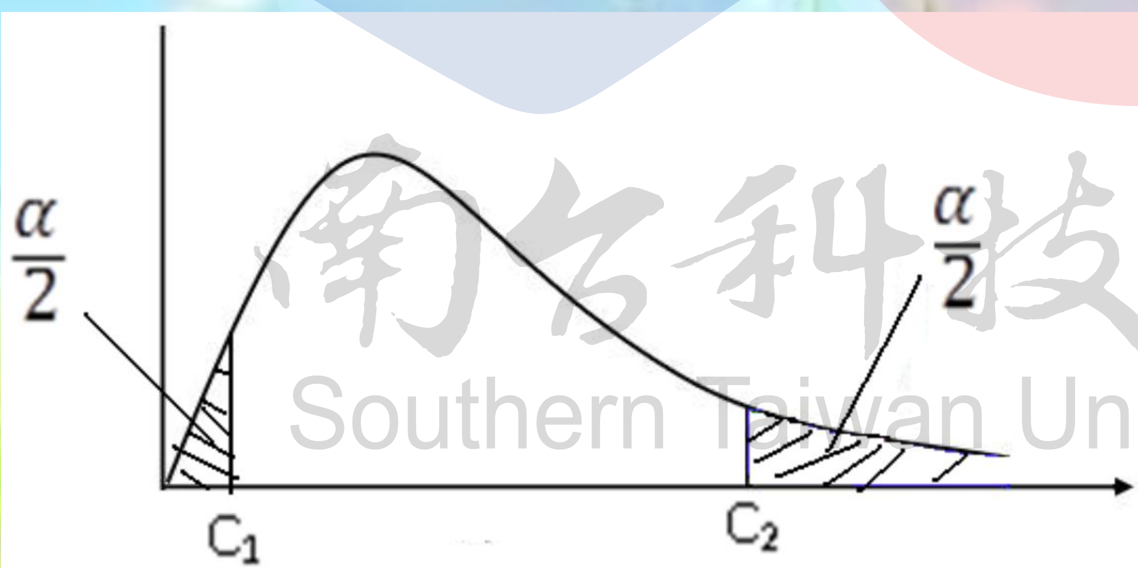


$$C_1 = \frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1} \qquad C_2 = \frac{\sigma_0{}^2 x^2{}_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$$

2. x^2值檢定法



3.P值檢定法



檢定方法 / 拒絕域 / 檢定型態	臨界值檢定法	x^2值檢定法	P 值檢定法
$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (雙尾)	$S^2 > \frac{\sigma_0^2 x^2_{\alpha/2}(n-1)}{n-1}$ 或 $S^2 < \frac{\sigma_0^2 x^2_{1-\alpha/2}(n-1)}{n-1}$	$x^2 > x^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $x^2 < x^2_{1-\alpha/2}(n-1)$	$s^2 > \sigma_0^2$ P 值$=2\times P(S^2 > s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$ $s^2 < \sigma_0^2$ P 值$=2\times P(S^2 < s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$
$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ (右尾)	$S^2 > \frac{\sigma_0^2 x^2_{\alpha}(n-1)}{n-1}$	$x^2 > x^2_{\alpha}(n-1)$	P 值$=2\times P(S^2 > s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$
$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ (左尾)	$S^2 < \frac{\sigma_0^2 x^2_{1-\alpha}(n-1)}{n-1}$	$x^2 < x^2_{1-\alpha}(n-1)$ $x^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	P 值$=2\times P(S^2 < s^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2)$ 拒絕H_0 if P 值$\leq \alpha$ 不拒絕H_0 if P 值$> \alpha$