9.2母體平均數μ之假設檢定

- 臨界值檢定法

假設$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

給定顯著水準α，試利用臨界值檢定法求下列檢定

Case1. σ^2已知

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Sol：在H_0為真之下

拒絕H_0 if $\bar{X}>C_2$或$\bar{X}<C_1$

α =P(拒絕$H_0|H_0$為真)

=P($\bar{X}>C_2$ or $\bar{X}<C_1|\mu=\mu_0$)

$\frac{\alpha}{2}$ =P($\bar{X}>C_2|\mu=\mu_0$)

=P($\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{C_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$)

=P($Z>Z_{\alpha/2}$)

$$\therefore \frac{C_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_{\alpha/2}$$

$$\Rightarrow C_2=\mu_0+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\alpha}{2}=P(\bar{X}<C_1|\mu=\mu_0)$$

$$=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{C_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$=P(Z<-Z_{\alpha/2})$$

$$\therefore \frac{C_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -Z_{\alpha/2}$$

$\Rightarrow$ $C_1 = \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

結論：

拒絕H_0 if $\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$或$\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(即不拒絕H_0 if

$\mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

如果模式改為右尾檢定

H_0：$\mu \le \mu_0$

H_1：$\mu > \mu_0$

在H_0為真之下

拒絕H_0 if $\bar{X}>C_2$

α =P(拒絕H_0|H_0為真)

=P($\bar{X}>C_2|\mu = \mu_0$)

=P($\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{C_2-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$)

=P(Z>Z_α)

$$\therefore \frac{C_2 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_\alpha$$

$$\Rightarrow C_2 = \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

結論：

拒絕H_0 if $\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(不拒絕H_0 if $\bar{x} \le \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

Case2. σ^2未知，n<30(小樣本)

$$H_0：\mu=\mu_0$$

$$H_1：\mu\neq\mu_0$$

Sol：在H_0為真之下

拒絕H_0 if $\bar{X}>C_2$或$\bar{X}<C_1$

α=P(拒絕$H_0|H_0$為真)

=P($\bar{X}>C_2$ or $\bar{X}<C_1|\mu=\mu_0$)

$$\frac{\alpha}{2}=P(\bar{X}>C_2|\mu=\mu_0)$$

$$=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>\frac{C_2-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$=P(T>t_{\alpha/2}(n-1))$$

$$\therefore\ \frac{C_2-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow\ C_2=\mu_0+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = P(\bar{X} < C_1 | \mu = \mu_0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{C_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P(T < -t_{\alpha/2}(n-1))$$

$$\therefore \frac{C_1-\mu_0}{S/\sqrt{n}} = -t_{\alpha/2}(n-1)$$

$$\Rightarrow C_1 = \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$$

結論：

拒絕H_0 if $\bar{x}>\mu_0+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$或

$\bar{x}<\mu_0-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$

(即不拒絕H_0 if

$\mu_0-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\le\bar{x}\le\mu_0+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$)

臨界值檢定法

分配條件 拒絕域 檢定型態	常態母體			非常態母體	
	①σ^2已知	②σ^2未知, $n<30$	③σ^2未知, $n\geq 30$	④σ^2已知, $n\geq 30$	⑤σ^2未知, $n\geq 30$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ (雙尾)	$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$ 或 $\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$	同①	同③
$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ (右尾)	$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}$	同①	同③
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ (左尾)	$\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} < \mu_0 - t_{\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}$	同①	同③

- Z檢定法(t檢定法)

假設$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$

給定顯著水準α，試利用Z檢定法(t檢定法)求下列檢定

Case1. σ^2已知

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

Sol：由臨界值檢定法之討論

拒絕H_0 if $\bar{x}>\mu_0+Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

或$\bar{x}<\mu_0-Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

上述不等式可改寫為

拒絕H_0 if $\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}>Z_{\alpha/2}$或$\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}<-Z_{\alpha/2}$

即拒絕H_0 if $z>Z_{\alpha/2}$或$z<-Z_{\alpha/2}$

⇨ 拒絕H_0 if $|z|>Z_{\alpha/2}$, $z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Z檢定法(t檢定法)

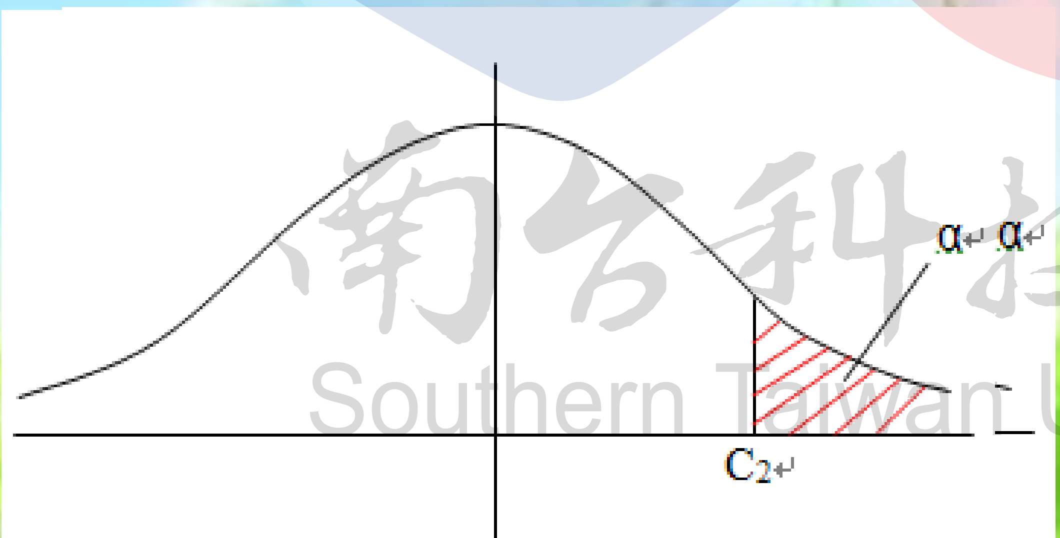
分配條件 拒絕域 檢定型態	常態母體			非常態母體	
	① σ^2已知	② σ^2未知, $n<30$	③ σ^2未知, $n\geq30$	④ σ^2已知, $n\geq30$	⑤ σ^2未知, $n\geq30$
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$ (雙尾)	$\lvert z \rvert > Z_{\alpha/2}$	$\lvert t \rvert > t_{\alpha/2}(n-1)$	$\lvert z \rvert > Z_{\alpha/2}$	同①	同③
$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$ (右尾)	$z > Z_{\alpha}$	$t > t_{\alpha}(n-1)$	$z > Z_{\alpha}$	同①	同③
$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$ (左尾)	$z < -Z_{\alpha}$ $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$t < -t_{\alpha}(n-1)$ $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$z < -Z_{\alpha}$ $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	同①	同③

- P檢定法

給定右尾檢定，顯著水準為 α

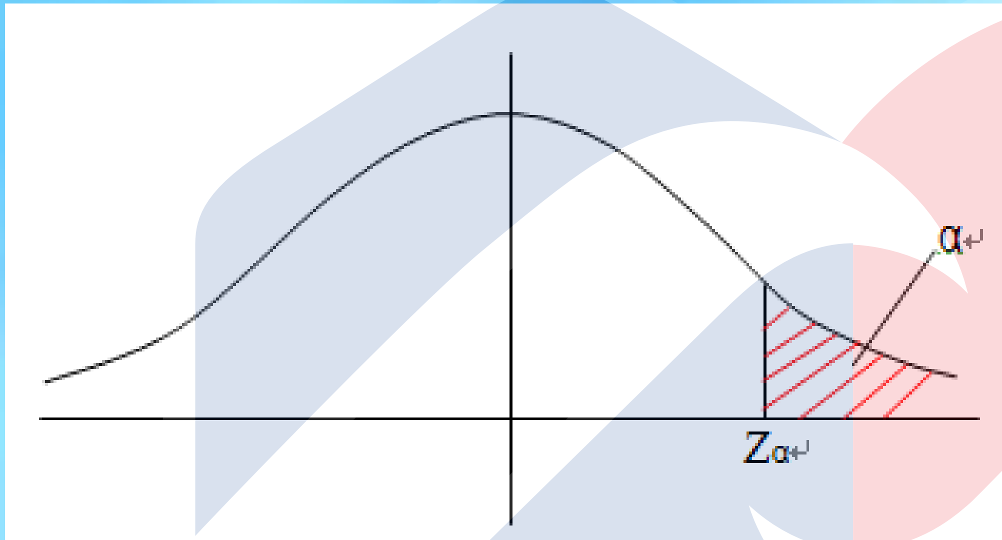
$$H_0: \mu \le \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0$$

臨界值檢定法



拒絕H_0 if $\bar{x} > \mu_0 + Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (C_2)

Z值檢定法

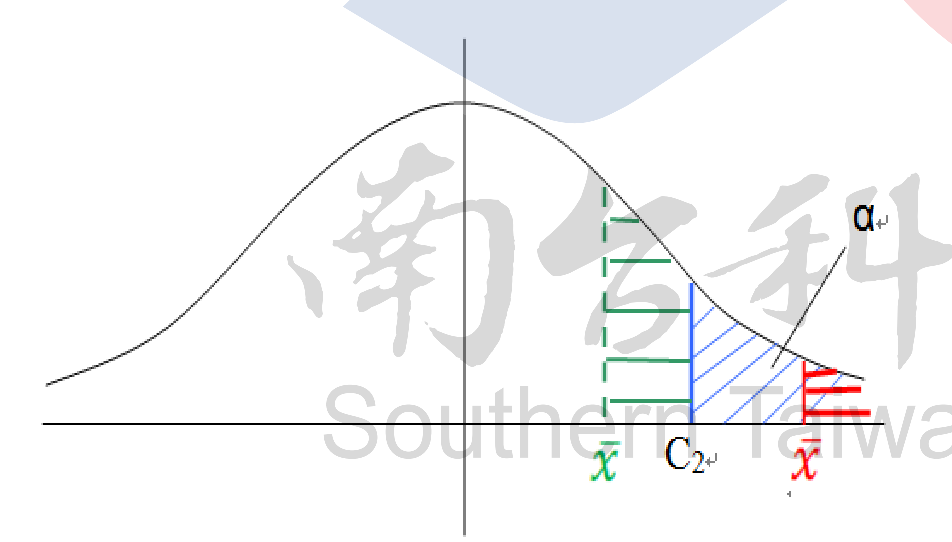


拒絕H_0 if

$z > Z_\alpha$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

P值檢定法



$$P值 = P(\bar{X} > \bar{x})$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

拒絕 H_0 if P值$\leq \alpha$

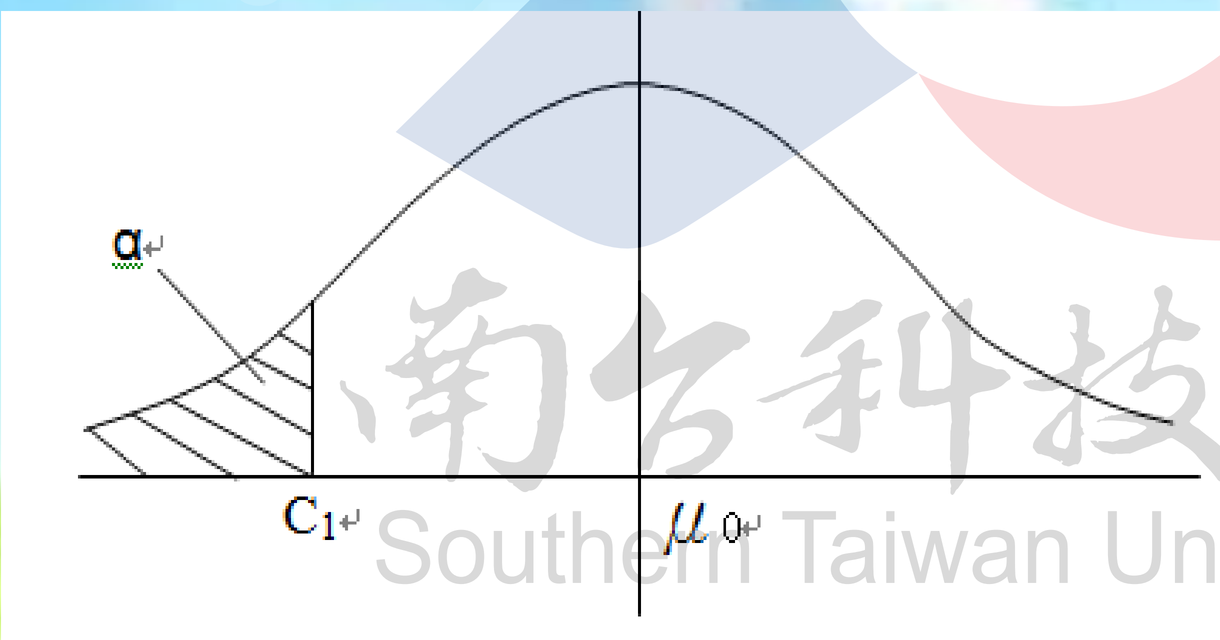
不拒絕 H_0 if P值$> \alpha$

給定左尾檢定，顯著水準為α

H_0 ：$\mu \geq \mu_0$

H_1 ：$\mu < \mu_0$

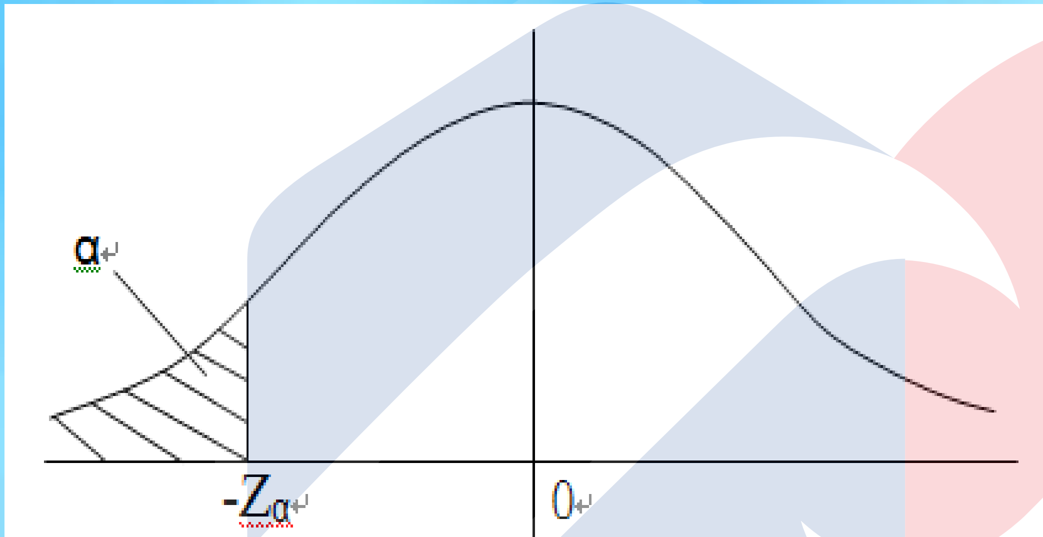
臨界值檢定法



拒絕H_0 if

$$\bar{x} < \mu_0 - Z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (C_1)$$

Z值檢定法

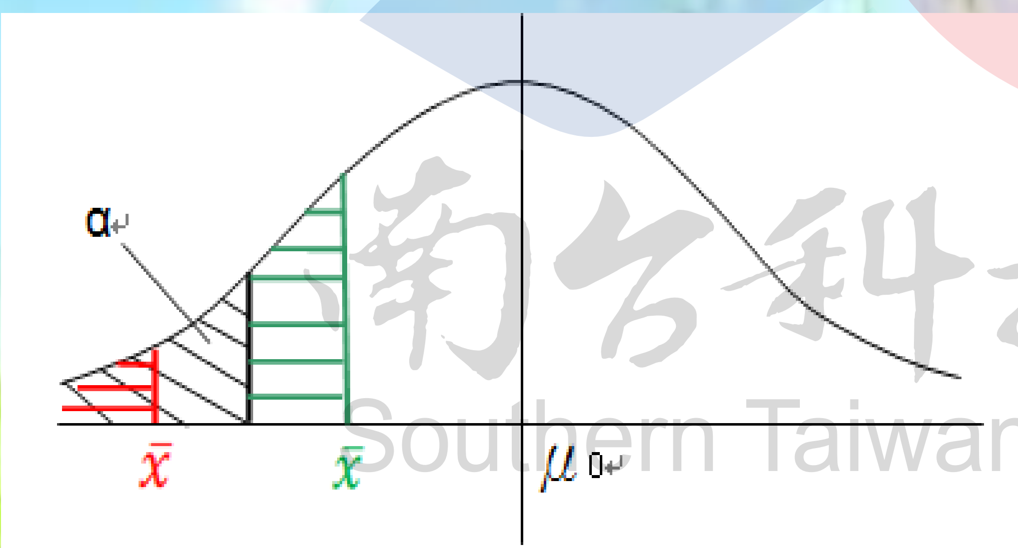


拒絕H_0 if

$z < -Z_\alpha$

$$z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

P值檢定法



$$P值 = P(\bar{X} < \bar{x})$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

拒絕H_0 if P值$\leq \alpha$

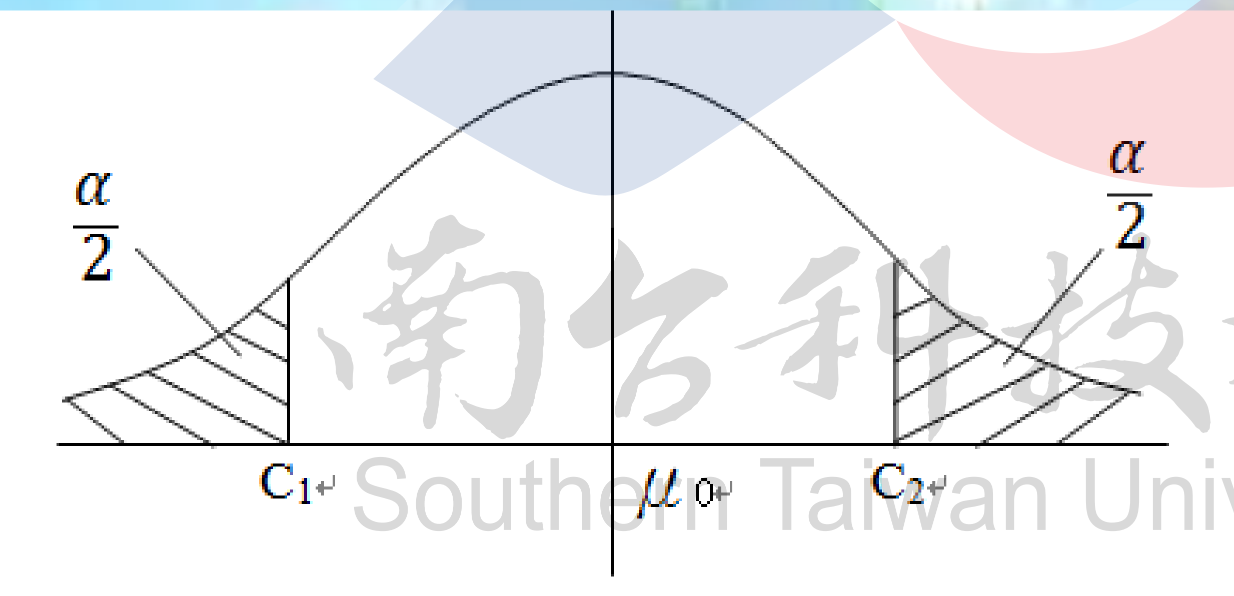
不拒絕H_0 if P值$> \alpha$

給定雙尾檢定，顯著水準為α

$H_0：\mu = \mu_0$

$H_1：\mu \neq \mu_0$

臨界值檢定法

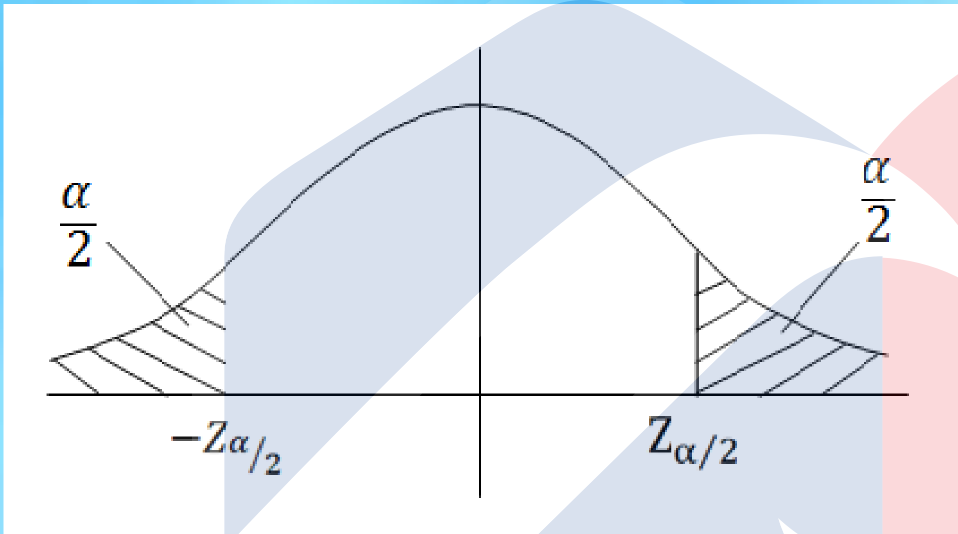


拒絕H_0 if

$\bar{x} > \mu_0 + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (C_2)

or $\bar{x} < \mu_0 - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (C_1)

Z值檢定法

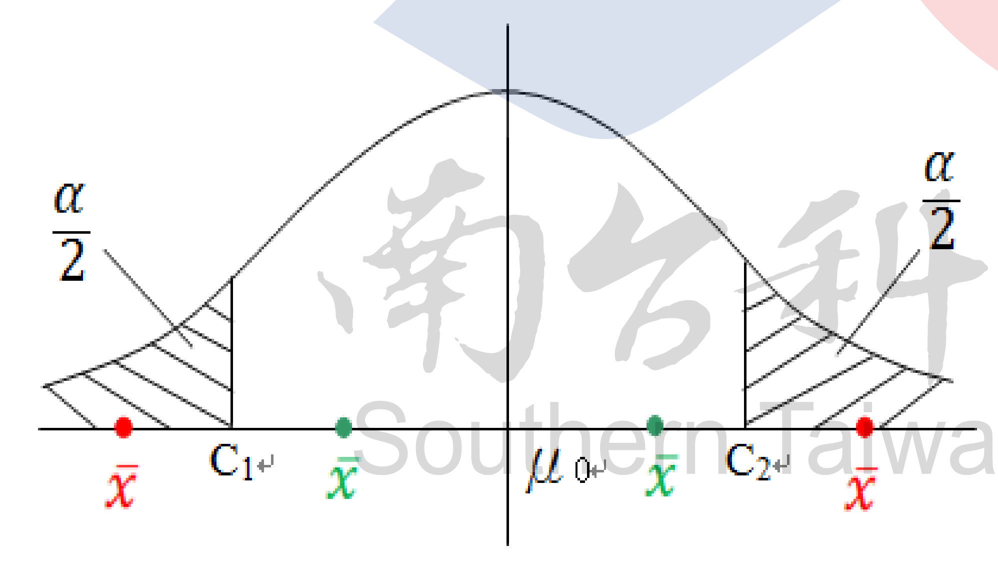


拒絕H_0 if

$|z| > Z_\alpha$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

P值檢定法



$\bar{x} > \mu_0 \Rightarrow$ P 值 $= 2 \times P(\bar{X} > \bar{x})$

$\bar{x} < \mu_0 \Rightarrow$ P 值 $= 2 \times P(\bar{X} < \bar{x})$

拒絕 H_0 if P值 $\leq \alpha$

不拒絕 H_0 if P值 $> \alpha$