第八章　估計

8.1 估計的意義

估計 $\begin{cases} \text{點估計(point estimation)} \\ \text{區間估計(interval estimation)} \end{cases}$

點估計：由抽樣所獲得的樣本 $(X_1,X_2,\dots,X_n)$組成的統計量，用來估計未知參數

例如：$T_1(X_1,X_2,\dots,X_n)=\bar{X}$ 用來估計 μ

$T_2(X_1,X_2,\dots,X_n)=S^2$用來估計$\sigma^2$

或$T_3(X_1,X_2,\dots,X_n)=\hat{P}$用來估計 P

此時，統計量$\bar{X}, S^2$及$\hat{P}$又稱為估計量(estimator)，將抽樣所獲得的樣本數值代入估計量，所得到的數值稱為估計值

(estimate)

8.2 點估計量性質

- 如何求點估計量

1.動差法(method of moments)

2.最大概數估計法(method of likelihood estimation)

- 如何評估點估計量優劣

1.不偏性(unbiased)

2.有效性(efficiency)

3.一致性(consistent)

4.充分性(sufficiency)

5.完全性(completeness)

- 不偏性

已知 $\mu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為未知參數 θ 之點估計量，若 E[$\mu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$]= θ，則 $\mu(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 為 θ 之不偏估計量(unbiased estimator)

Ex. E($\bar{X}$)= μ

E(S^2)=σ^2

⇨ $\bar{X}, S^2$ 分別為 μ, σ^2 之不偏估計量

- 有效性

考慮母體參數 θ 之所有不偏估計量中，若 $\hat{\theta}$ 為母體參數 θ 之最小變異數不偏估計量(minimum variance unbiased estimator , MVUE)

- 相對有效性(relative efficiency)

已知 $\hat{\theta}_1$ 及 $\hat{\theta}_2$ 皆為母體參數 θ 之不偏估計量

若 $V(\hat{\theta}_1)<V(\hat{\theta}_2)$ 則 $\hat{\theta}_1$ 較 $\hat{\theta}_2$ 相對有效

$V(\hat{\theta}_1)>V(\hat{\theta}_2)$ 則 $\hat{\theta}_2$ 較 $\hat{\theta}_1$ 相對有效

- 標準誤(standard error)

估計量$\hat{\theta}$之標準誤定義為

$\sigma_{\hat{\theta}}=\sqrt{v(\hat{\theta})}$，若上述的標準誤含有未知參數，須以估計值代入，稱為被估計的標準誤，以$s_{\hat{\theta}}$或$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$表示

8.3 區間估計

區間估計是以點估計量的抽樣分配為基礎，求出區間上下界，用以估計母體參數落於該區間的機率大小，即$\hat{\theta}$為母體參數θ之估計量，經由數字推導可以獲得

$$1-\alpha=P(\ell(\hat{\theta})\leq\theta\leq\mu(\hat{\theta}))$$

我們稱$[\ell(\hat{\theta}),\mu(\hat{\theta})]$為未知參數$\theta$之100(1-$\alpha$)% 信賴區間(confidence interval 簡稱 C.I.)

$1-\alpha$：信賴水準

$\ell(\hat{\theta})$：信賴下限

$\mu(\hat{\theta})$：信賴上限

- 求信賴區間三步驟

1. 先決定統計量及抽樣分配
2. 計算出機率區間
3. 再轉換成信賴區間

8.4 母體平均數μ之區間估計

$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2$已知，

求μ之$100(1-\alpha)\%$ C. I.

步驟 1 $\bar{X} \xrightarrow{\text{推論}} \mu$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

步驟 2

$$1-\alpha = P\left(-Z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(-\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

則$\left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$為$\mu$之

$100(1-\alpha)\%$ C. I.

$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2$已知,

且 n<30, 求 μ 之 $100(1-\alpha)\%$ C. I.

步驟 1 $\bar{X} \xrightarrow{\text{推論}} \mu$

$\because \sigma^2$ 未知且 n<30(小樣本)

則 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

步驟 2

$$1-\alpha = P\left(-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

$$= P\left(-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right.$$

$$< \bar{X} - \mu < t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$=P(-\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$< -\mu < -\bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

$$=P(\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$< \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}})$$

則$[\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},$

$\bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}]$為μ之100(1−

α)% C. I.

- μ之區間估計整理

1.母體為常態分配

Case1.σ^2已知

則$[\bar{x}-Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$為$\mu$之100(1-$\alpha$)% C. I.

Case2. σ^2未知,n≥30

則$[\bar{x}-Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x}+Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}]$為$\mu$之近似 100(1-$\alpha$)% C. I.

Case3. σ^2未知,n<30

則$[\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},$

$\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}]$為μ之100(1-$\alpha$)% C. I.

2.母體非常態分配

Case1.σ^2已知, $n \geq 30$

則$\left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$為$\mu$之近似 $100(1-\alpha)\%$ C. I.

Case2. σ^2未知,$n \geq 30$

則$\left[\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$為$\mu$之近似 $100(1-\alpha)\%$ C. I.