第五章　離散型隨機變數及其常用的機率分配

5.1 隨機變數(random variable)

隨機變數為一實數函數，目的是將樣本空間之元素量化，進一步可討論隨機變數可能值發生的機率。

例如：擲一公正硬幣三次，令隨機變數 Y 表示出現正面的次數，試討論隨機變數的可能值及其發生的機率。

｛Y=0｝＝｛TTT｝

｛Y=1｝＝｛HTT, THT, TTH｝

｛Y=2｝＝｛HHT, HTH, THH｝

｛Y=3｝＝｛HHH｝

則隨機變數 Y 的可能值為 0,1,2,3

$$\left.\begin{array}{l} P(Y=0)=\frac{1}{8} \\ P(Y=0)=\frac{3}{8} \\ P(Y=0)=\frac{3}{8} \\ P(Y=0)=\frac{1}{8} \end{array}\right\} \text{稱為隨機變數 Y 之機率分配}$$

如果將上述的機率分配寫成函數形式

P(Y=y)=$C_y^3(\frac{1}{2})^y(1-\frac{1}{2})^{3-y}$,y=0,1,2,3

則稱為機率分配函數(離散型)

隨機變數可分成離散型隨機變數及連續型隨機變數，不同的隨機變數會產生不同的機率分配。

5.2 離散型隨機變數(discrete type random variable)

一離散型隨機變數 Y 之機率分配為

P(Y=y)=f(y)

f(y)有下列性質：

1. $0 \leqq f(y) \leqq 1$
2. $\sum_y f(y) = 1$

5.3 期望值(expected value)

變異數(variance)

●期望值

令隨機變數 Y 具有機率分配 P(Y=y)，則隨機變數 Y 之期望值為 μ=E(Y)，定義如下：

$$\mu=E(Y)=\sum_y y\,P(Y=y)$$

令隨機變數 Y 具有機率分配 P(Y=y)，則隨機變數 Y 之函數 k(Y)之期望值為 E[k(Y)]，定義如下：

$$E[k(Y)]=\sum_y k(y)\,P(Y=y)$$

●變異數

令隨機變數 Y 具有機率分配 P(Y=y) 且隨機變數期望值為 μ=E(Y)，則隨機變數 Y 之變異數為 $\sigma^2 = V(Y)$，定義如下：

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(Y) &= E\left[(Y-E(Y))^2\right] \\ &= E[(Y-\mu)^2] \\ &= \sum_y((y-\mu)^2)\,P(Y=y)\end{aligned}$$

●期望值及變異數基本定理

1. a,b 為常數則 E(aY+b)=aE(Y)+b

2. a,b 為常數則 V(aY+b)=a^2V(Y)

3. $h_1(Y), h_2(Y), \ldots, h_k(Y)$為隨機變數 Y 之 k 個函數，則

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[h_1(Y) + h_2(Y) + \cdots + h_k(Y)] \\
&= \mathrm{E}(h_2(Y)) + \mathrm{E}\big(h_2(Y)\big) + \cdots + \mathrm{E}(h_k(Y))
\end{aligned}
$$

4. 令隨機變數 Y，期望值 E(Y)=μ，則

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V(Y)} &= \mathrm{E[(Y - E(Y))^2]} \\
&= \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{[E(Y)]}^2 \\
&= \mathrm{E}(Y^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

5.4 伯努俐分配(Bernoulli distribution)

二項分配(Binomial distribution)

超幾何分配(Hypergeometric distribution)

● 伯努俐分配

一隨機實驗其結果只有兩種，成功(Y=1)或失敗(Y=0)，則稱該實驗為伯努俐實驗，上述實驗所產生的分配稱為伯努俐分配，定義如下：

$$P(Y=y)=P^{y}(1-P)^{1-y}, y=0,1$$

其中 P 表示成功的機率

1-P 表示失敗的機率

● 二項實驗

執行 n 次獨立伯努俐實驗，則稱此實驗為二項實驗。

● 二項分配

由二項實驗所產生的分配稱為二項分配

定義如下：

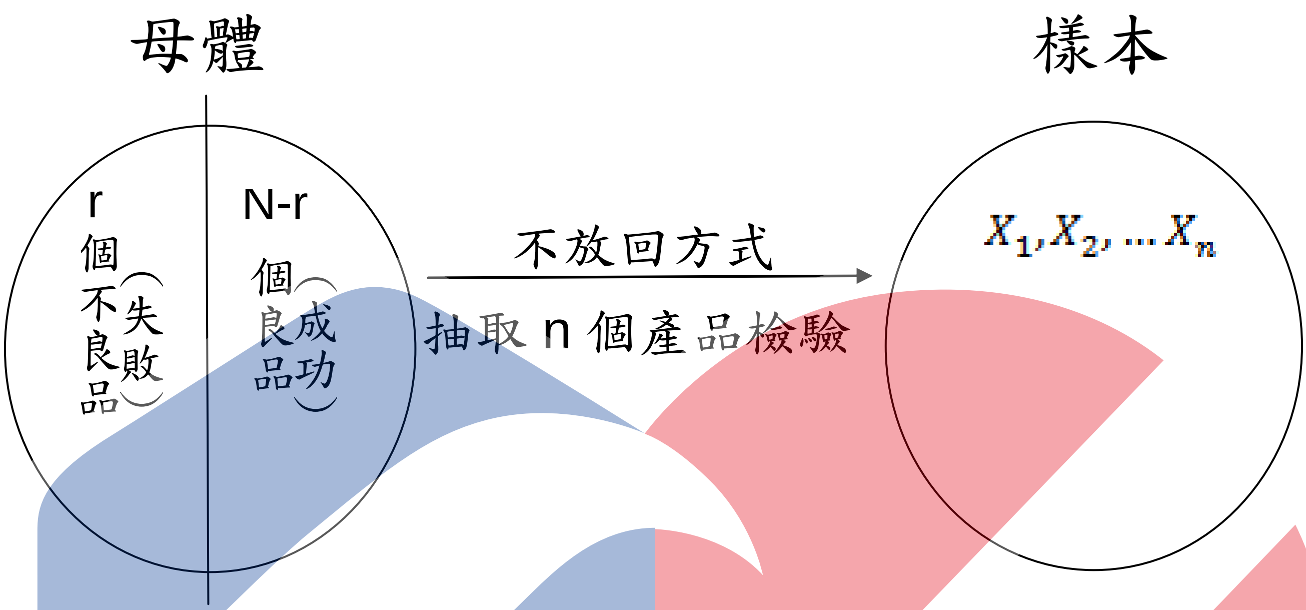
$P(Y=y)=C_y^n P^y(1-P)^{n-y}$,y=0,1,2,..,n

μ=E(Y)=nP

$\sigma^2=V(Y)=nP(1-P)$

二項分配簡略表示為 Y~B(n,P)

●超幾何分配



$P=\frac{r}{N}$表示母體不良率(未知)

令隨機變數 Y 表示檢驗 n 個產品中不良品的個數，則隨機變數 Y 的分配稱為超幾何分配，定義如下：

$P(Y=y)=\frac{C_y^r C_{n-y}^{N-r}}{C_n^N}$,max[0,n-(N-r)] ≤ r ≤ min[r,n]

μ=E(Y)=nP

$$\sigma^2 = V(Y) = nP(1-P)\frac{N-n}{N-1}$$

$P=\frac{r}{N}$

超幾何分配簡略表示為 Y~H(N,n,r)

●二項分配與超幾何分配的關係

當母體內的元素被分成兩類(良品或不良品，成功或失敗，贊成或反對，男或女，……)，以放回方式抽樣，則可視為二項分配，以不放回方式抽樣，則為超幾何分配，現實環境裡不太可能有放回抽樣，因此在不放回抽樣方式下，當$\frac{n}{N} \geq 0.05$視為超幾何分配，$\frac{n}{N} < 0.05$視為二項分配。